ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, професора, завідувача кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка **Банаха Тараса Онуфрійовича** на дисертаційну роботу **Козловського Миколи Романовича** «**Необхідні і достатні умови на множину точок розриву нарізно неперервних функцій**», подану на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дослідження. Дисертаційна робота Миколи Козловського знаходиться в руслі традиційних досліджень чернівецької Школи абстрактного аналізу, створеної світлої пам'яті професором Володимиром Кириловичем Маслюченком. У свою чергу ця Школа продовжує класичні дослідження Рене Бера, Ганса Гана (який довгий час працював в Чернівцях), Анрі Лебега, Казимира Куратовського та інших добре відомих математиків XX-го століття. Конкретна задача, що розглядається у дисертації веде свою історію від Рене Бера, що охарактеризував множину точок розриву нарізно неперервної функції двох дійсних змінних як множину, що є зліченним об'єднанням замкнених проєктивно ніде не щільних підмножин площини. Пізніше цей класичний результат Бера узагальнювався в різних напрямках такими математиками як Вера (1907), Юнг (1909), Ган (1921), Куратовський (1931), Кемпістий (1932), ван Влек (1935), Кешнер (1943), Моран (1969), Гансел (1974), Наміока (1974), Брекенрідж, Нішіура (1976), Талаґран (1979), Кальбрі, Труалік (1979), Христенсен (1981), Пйотровський (1985), Дебс (1986), Бузіад (1994), та українськими математиками зі Львова та Чернівців (як мінімум). Проте остаточно задача характеризації множини точок розриву нарізно неперервної функції на добутках топологічних просторів залишається нерозв'язаною і тому тема дисертації безумовно актуальна.

Зміст роботи і новизна одержаних результатів. Дисертація (її повний обсяг становить 140 сторінок друкованого тексту) складається зі вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 50 найменувань.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, встановлено зв'язок дослідження з науково-дослідними роботами та проєктами, сформульовано мету, задачі, об'єкт, предмет та методи дослідження, зазначено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, також зазначено, де опубліковано і де було апробовано результати дисертаційного дослідження.

У **першому розділі** здійснено огляд відомих результатів по темі дисертаційного дослідження, а також методів їх доведення, зокрема за допомогою когерентності фільтрів.

Другий розділ містить огляд базового математичного інструментарію: коливання функцій, теорема Стоуна про паракомпактність, компактифікації, фільтри, когерентність.

Третій розділ присвячено вивченню цікавого поняття регулярної підмножини у топологічному просторі. Це поняття є ключовим інструментом при побудові нарізно неперервних функцій із заданою множиною точок розриву у теоремі 3.3.1, яка є одним з основних результатів 3-го розділу. Окрім згаданої теореми, третій розділ містить ще один важливий результат, я саме теорему 3.4.7 про неіснування нарізно неперервної функції на квадраті компактифікації Стоуна-Чеха зліченного дискретного простору, множина точок розриву якої збігалася б з квадратом наросту компактифікації. Ця теорема складна, цікава і важлива. Її віртуозне доведення демонструє математичну потугу дисертанта (та його наукового керівника).

У **четвертому розділі** здійснюється підготовча робота для вивчення (сильно) нарізно неперервних функцій на скінченних добутках топологічних просторів і доводяться деякі теореми про зведення випадку багатьох змінних до випадку функцій від двох змінних.

У **п'ятому розділі** відома техніка майже когерентних фільтрів узагальнюється на випадок скінченної кількості фільтрів, що дозволяє узагальнювати відомі теореми про нарізно неперервні функції на добутку двох топологічних просторів з єдиною неізольованою точкою на функції більшої кількості змінних, що зроблено у теоремі 5.3.2, яка є одним з основних результатів п'ятого розділу. Цікавою є також теорема 5.5.3 про зв'язок принципу когерентності вільних P-фільтрів (який є незалежним від ZFC) та існуванням сильно нарізно неперервних характеристичних функцій з одноточковою множиною розриву. Для випадку двох змінних ця теорема була доведена у 2007 році Банахом, Маслюченком та Михайлюком.

Дослідження зв'язку між когерентністю P-фільтрів та нарізною неперервністю досягає кульмінації у **шостому розділі,** основними результатами якого є теореми 6.1.3, 6.2.5, 6.3.3, 6.3.4 про зв'язок нарізної неперервності з послабленим принципом майже когерентності P-фільтрів, який стверджує, що існує максимум два класи майже когерентності P-фільтрів. До речі, несуперечливість існування рівно двох класів майже когерентності ультрафільтрфів було "доведено" Бласом та Шелахом у 1987, потім в їхньому доведенні знайшли помилку, яка була виправлена зовсім недавно у статті Гайки Мільденбергер 2024 року.

Відсутність порушення академічної доброчесності. За результатами перевірки дисертаційної роботи та публікацій не виявлено ознак академічного плагіату, елементів фабрикації та фальсифікації. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. У дисертаційній роботі відсутні порушення академічної доброчесності.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів. Усі основні результати дисертації строго обґрунтовані та супроводжуються коректними математичними доведеннями.

Апробація результатів і публікації. Результати дисертації опубліковано в чотирьох статтях, три з яких проіндексовано у Scopus, та анонсовано на чотирьох престижних міжнародних конференціях, а також на Літній Школі в Колочаві, де я мав змогу познайомився з автором дисертації та його науковими пошуками та знахідками.

Практичне значення результатів дисертації. Результати дисертації мають теоретичне значення, причому як у теорії нарізно неперервних функцій, так і в теорії множин, при вивченні когерентності фільтрів.

Зауваження. Дисертація досить акуратно оформлена, має струнку та логічну структуру. На жаль, трапляються описки, знайшов я також один сумнівний аргумент в доведенні (який, проте, не є критичним). Ось список зауважень:

1. На 2-й та 7-й сторінках XIX століття записано некоректно як IXX століття, що суперечить правилам давньоримського числення.
2. Часто трапляються описки та неузгодженості, зокрема: «chapter..» на стор. 11, «funcions» на стор. 13, «Ганн» в останній лінійці сторінки 17, «пряму обернену задачу» замість «пряму задачу» на стор. 17, «… чином У випадку…» на стор. 18, «компактнів» на стор.19, «несеметричні» та «несеметричних» на стор.19 і 24, «Намміоки» на стор. 21, «A*x*B» замість «A×B» на стор. 24, крапка замість коми в теоремі 5.3.1, розрив прізвища Намі оки на стор. 41, «непорожній» замість «непорожних» та стор.43, з «даними одноточковим розривом» на стор.45, «приклада» замість «прикладу» на стор.45, «Незай» на стор. 48, «лема Урисон» замість «лема Урисона» в теоремі 2.1.3, «неперервна функція така, що» замість «такі неперевні функції, що» в твердженні 2.1.6, русизм «розглядаємого» на стор. 51, «компактифікація» замість «компактифікацію» на стор. 52, «сім'я дійсний чисел» на стор. 61, «базові відкрито-замкнена множини» на стор. 69, «існує гомеоморфізми» та стор. 70, «власні підмножин множини» в твердженні 4.1.3, «неперевроної» на стор. 88…
3. Означуване слово *регулярною* в означенні на стор. 24 вартувало б виділити курсивом. Те ж стосується означуваного терміну *майже когерентний* на стор. 53.
4. В українській математичній термінології closed sets зазвичай перекладається як «замкнена множина», а не «закрита», як написано в твердженні 3.1.5 та теоремах 2.2.3, 3.1.15.
5. Дріб ¼ в твердженні 3.4.5 вартувало друкувати трохи меншого розміру (за допомогою команди \tfrac, а не \frac).

6. На початку сторінки 53, автор пише, що «Враховуючи теорему 2.2.5, отримуємо, що всі базові множини є відкрито-замкнені в $\beta\omega$», що вірно, але не факт, що випливає з теореми 2.2.5, бо ця теорема нічого не говорить про замикання нескінченних підмножин ω.
7. Фільтри з сім'ї F, яка означена на сторінці 53, зазвичай називають *вільними.* Це фільтри з порожнім перетином і тому вони містять усі коскінченні множин і мають потрібну властивість (інваріантності відносно скінченних модифікацій).
8. При обговоренні майже когерентності P-фільтрів на стор.54, вартувало б згадати відомі результати про кількість класів майже когерентності ультрафільтрів (що їх є або скінченна кількість, або $2^{\mathfrak{c}}$ – це наш спільний з Бласом результат 2006 року, і також правильні і неправильні теореми Бласа-Шелаха та Мільденбергер про несуперечливість існування рівно двох чи рівно трьох класів некогерентності ультрафільтрів), бо саме до обчислення кількості класів когерентності P-фільтрів зведено задачу існування нарізно неперервних функцій з одноточковою множиною розриву в розділі 6.
9. Не зрозуміло, чому множини F_n на стор. 69 є відкритими (замкненість більщ-менш очевидна). Хоча відкритості цих множин і не потрібно. Подальше застосування теореми Бера дозволяє знайти множину F_n з непорожньою внутрішністю і цього достатньо для коректного продовження доведення.
10. Виглядає, що лема 5.1.2 некоректна, бо сім'я y не зобов'язана бути фільтром, якщо фільтри $x_1,\dots,x_n$ не є зчепленими, тобто не розширюються до фільтра. Після додавання умови зчепленості ця лема стає правдивою і саме в такому слабшому формулюванні може бути застосована у доведенні твердження 5.1.3, яке, таким чином залишається коректним. Крім того, в означенні фільтра y в лемі 5.1.2 фільтри $y_1,\dots,y_n$ мають бути фільтрами $x_1,\dots,x_n$.

Проте зазначені вище зауваження не применшують позитивного враження від дисертаційної роботи та не підважують коректності доведень основних результатів дисертації, яка є важливим внеском у теорію нарізно неперервних функцій та їхнім застосуванням в теорії множин, особливо до вивчення майже когерентних фільтрів.

Висновок. Вважаю, що дисертаційна робота «Необхідні і достатні умови на множину точок розриву нарізно неперервних функцій» Миколи Романовича Козловського є завершеною науковою працею, що містить нові важливі наукові результати з цікавими застосуваннями до теорії множин. Основні результати дослідження добре висвітлені у наукових працях. Робота повністю відповідає усім вимогам спеціальності 111 Математика та вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами № 341 від 21 березня 2022 р., № 502 від 19 травня 2023 р., №507 від 3 травня 2024 р.), а її автор, Козловський Микола Романович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Офіційний опонент:
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри алгебри, топології та основ математики
Львівського національного університету імені Івана Франка

__________ Тарас БАНАХ

Підпис Банаха Т.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ імені ІВАНА ФРАНКА