ВІДГУК
на дисертаційну роботу
Козловського Миколи Романовича
«Необхідні і достатні умови на множину точок розриву
нарізно неперервних функцій»,
представлену на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 «Математика та статистика»
за спеціальністю 111 «Математика»

Дисертаційна робота Козловського Миколи Романовича «Необхідні і достатні умови на множину точок розриву нарізно неперервних функцій» продовжує тематику Чернівецької школи по дослідженню структури множин точок розриву нарізно неперервних функцій.

Множини точок розриву нарізно неперервних функцій почали вивчатись в роботах Р. Бера та А. Лебега. Ця діяльність продовжена такими математиками як Г. Ган, В. Юнг та Г. Юнг, Е. ван Влек, С. Кемпістий, Р. Кешнер, К. Куратовський, І. Наміока, М. Талагран, Ж. Кальбрі, Ж.-Р. Труалік, Р. Крістенсен, З. Пьотровський, Р. Гансел, В. Маслюченко, В. Михайлюк, Т. Банах та багатьма іншими.

В даній роботі отримано декілька нових нетривіальних результатів про існування нарізно неперервних функцій на добутках топологічних просторів з одноточковими розривами.

1. Коротко опишу змісти дисертаційної роботи.

В перших трьох розділах наведено огляд попередніх результатів з даної тематики та наведено допоміжні твердження, які використовуються далі в тексті.

В третьому розділі вводиться поняття *регулярної* підмножини A топологічного простору X. Підмножина $A \subset X$ називається *регулярною*, якщо існує неперервна функція $\phi\colon A \to [0;1]$ така, що $A = \phi^{-1}(0)$ і для кожної точки $a \in A$ і її околу U існує натуральне n таке, що $\phi(U)$ перетинає кожен відрізок виду $[\frac{1}{2^{k+1}}; \frac{1}{2^k}]$ для всіх $k \geq n$.

Це поняття виявилось дуже корисним в даному досліженні і з його допомогою встановлено декілька тверджень про існування чи не існування нарівно неперервних функцій із заданою множиною точок розриву.

В підрозділах 3.1 та 3.2 досліджуються базові властивості регулярних множин. Зауважимо, що за означенням, регулярна множина A є функціонально замкненою. В твердженні 3.1.1 показано, що така множина повинна бути також ніде не щільною в X. Далі встановлено такі достатні умови за яких ніде не щільна функціонально замкнена множина $A \subset X$ є регулярною:

- X – локально зв'язний (твердження 3.1.2), або метризовний (твердження 3.1.8);
- $A = \{a\}$ – одноточкова і має злічену локальну базу (твердження 3.1.5);
- A – двохсторонньо сепарабельна (твердження 3.2.3)

В підрозділі 3.3, як узагальнення відомої функції Шварца, побудовано приклад напівнеперервної знизу нарізно неперервної функції $f\colon X \times Y \to [0;1]$ на добутку двох топологічних просторів, у якої множина точок розриву має вигляд $A \times B$, де $A \subset X$, $B \subset Y$ – ніде не щільні функціонально замкнені підмножини, одна з яких є також регулярною (теорема 3.3.1).

В підрозділі 3.4 розглянуто компактифікацію Стоуна-Чеха множини ω натуральних чисел $\beta\omega$. Нехай $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ – відповідний «наріст» ω і $\beta\omega$. Спочатку показано, що ω^* не є регулярною підмножиною в $\beta\omega$. Основний результат підрозділу – теорема 3.4.7 – стверджує, що не існує нарізно неперервної функції $f\colon \beta\omega \times \beta\omega \to [0;1]$, для якої $\omega^* \times \omega^*$ був би множиною точок розриву.

В розділі 4 розглядається питання існування нарізно неперервних функцій $f\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to [0;1]$ з однією точкою розриву $(x_1, \ldots, x_n)$ на прямому добутку комактних гаусдорфових просторів таких, що x_i не є ізольованою в X_i (теорема 4.3.4). Ця теорема узагальнює результат В. Михайлюка (2005) для $n = 2$.

В розділі 5 вивчається множина $\mathcal{F}$ фільтрів на множині натуральних чисел, кожен з яких містить всі множини виду $\mathbb{N}_m := \{n \geq m\}$, і серед них фільтри спеціального виду, які називаються P-фільтрами. Ці фільтри відіграють важливу роль в теорії множин у зв'язку з певними гіпотезами пов'язаними з гіпотезою континуума. А саме, якщо розглянути такі гіпотези:

(NCF) кожні два фільтри з $\mathcal{F}$ є майже когерентними,
(NCFP) кожні два P-фільтри з $\mathcal{F}$ є майже когерентними,
(CH) континуум гіпотеза

то мають місце такі імплікації (NCF)$\Rightarrow$(NCFP)$\Rightarrow\neg$(CH).

Добре відомо, що для кожного фільтра x на $\mathbb{N}$ можна визначити топологію на $\mathbb{N} \sqcup \{x\}$ яка складається з усіх підмножин $A \subset \mathbb{N}$, а також множин виду $B \cup \{x\}$ для всіх $B \in x$. Отриманий топологічний простір позначається через $\mathbb{N}_x$.

В роботі Т. Банаха, О. Маслюченка і В. Михайлюка показано, що якщо $x, y \in \mathcal{F}$ два фільтри такі, що кожна нарізно неперервна функція $f\colon \mathbb{N}_x \times \mathbb{N}_y \to [0;1]$ є неперервною, то x, y є P-фільтрами, але не є майже когерентними.

Основний результат підрозділу - теорема 5.3.2 - дає в певному сенсі обернене твердження, причому для довільного числа множників. А саме, вона стверджує, що якщо $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{F}$ – P-фільтри, які не є майже когерентними, то кожна нарізно неперервна функція $f\colon \mathbb{N}_{x_1} \times \cdots \times \mathbb{N}_{x_n} \to [0;1]$ є неперервною.

В підрозділі 5.5, за умови виконання гіпотези (NCFP) показано (теорема 5.5.2), що довільних цілком регулярних просторів $X_1, \dots, X_n$ та неізольованих точок $x_i \in X_i$ існує сильно нарізно неперервна функція $f\colon X_1 \times \dots \times X_n \to [0;1]$ множина точок розриву якої є одна точка $(x_1, \dots, x_n)$.

Більш того, в теоремах 5.5.3 та 6.3.3 отримана характеризація гіпотези (NCFP) в термінах існування сильно нарізно неперервних функцій з єдиною точкою розриву на добутках цілком регулярних просторів. Розділ 6 фактично присвячений доведенню теореми 6.3.3.

2. Деякі одруківки:

2.1. стор. 2, рядок 12 зверху: потрібно замінити
«*Рене Бера* ***на*** *Анрі Лебега*» на «*Рене Бера* ***та*** *Анрі Лебега*»

2.2. стор. 4, рядок 12 знизу: потрібно замінити
«*встановлюєсо*» на «*встановлює****мо***»

2.3. стор. 18, рядок 7 знизу: потрібно замінити
«*Таким чином У випадку ...*» на «*Таким чином, у випадку ...*»

2.4. стор. 19, рядок 6 зверху: потрібно замінити
«*несеметричні*» на «*несиметричні*»

2.5. стор. 39, рядок 1 знизу: потрібно замінити
«*має проекцій*» на «*має проекції*»

2.6. стор 48, рядок 10 знизу: потрібно замінити
«*Нехай*» на «*Нехай*»

2.7. стор 49, Теорема 2.13: потрібно замінити
«*лема Урисон*» на «*лема Урисона*»

2.8. стор 50, Твердження 2.1.5, рядок 2: потрібно замінити
«$g\colon X \to [0,1$ – *неперервна функція*» на «$g\colon X \to [0,1]$ – *неперервна функція*»

2.9. стор 50, Твердження 2.1.5, рядок 5: потрібно замінити
«*таки, що*» на «*така, що*»

2.10. стор 50, рядок 5 знизу: потрібно замінити
«$\theta^{(}(0,1])$» на «$\theta((0,1])$»

2.11. стор. 52, теорема 2.2.5. Цю теорему варто було б переформулювати в еквівалентному, але більш «зрозумілому» вигляді: *якщо X – нескінченний дискретний простір, то βX є нульвимірним.*

Я не зрозумів, як з теореми 2.2.5 випливає, що для кожної підмножини $A \subset \omega = \{1, 2, \dots\}$ її замикання $\overline{A}$ в $\beta\omega$ є також відкритим (стор. 53, рядки 1-2 зверху).

2.12. стор. 57, рядок 5 знизу, твердження 3.1.5: потрібно замінити
«*закритою*» на «*замкненою*»

2.13. стор. 61, рядок 4 знизу: потрібно замінити «*сім'я дійсний*» на «*сім'я дійсних*»

3. Вказані недоліки носять технічний характер, легко виправляються і не впливають ні на результати дисертації ні на дуже позитивне враження від неї.

Результати дисертації є новими, цікавими і є важливим кроком в теорії нарізно неперервних функцій. Робота гарно написана і добре вичитана. Всі формулювання дуже чіткі.

Вважаю, що за новизною, актуальністю, обсягом та практичним значенням дисертація М. Р. Козловського «Необхідні і достатні умови на множину точок розриву нарізно неперервних функцій» відповідає вимогам наказу МОН України №40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації» (зі змінами №759 від 31.05.2019) та «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12 січня 2022 (зі змінами № 341 від 21 березня 2022 р., № 502 від 19 травня 2023 р., №507 від 3 травня 2024 р.), а її автор, Козловський Микола Романович, заслуговує присудження йому ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

Офіційний опонент
академік НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, професор,
завідувач відділу алгебри і топології
Інституту математики НАН України Сергій МАКСИМЕНКО

Підпис Максименка С. І. засвідчую
Учений секретар
Інституту математики НАН України,
кандидат фіз.-мат. наук Ігор СОКОЛЕНКО