

## АНОТАЦІЯ

*Візінська І. І.* Апроксимація початкових і крайових задач для диференціально функціональних рівнянь та їх числове моделювання. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – «Прикладна математика». – Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, 2023.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню схем апроксимації початкових задач для систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого й нейтрального типів з багатьма запізненнями послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь та їх застосуванню до дослідження на стійкість систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями і знаходження верхньої межі запізнення для якої зберігається стійкість системи із запізненням. Розглядається також застосування схем апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь для наближення розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням.

Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та двох додатків. У вступі проаналізовано сучасний стан досліджень з теорії початкових та крайових задач для диференціально різницевих та диференціально функціональних рівнянь. Обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами. Зазначено особистий внесок здобувача, а також наведено дані про те, де доповідались, обговорювались та опубліковано основні результати дисертації.

У розділі 1 наведені деякі відомості з теорії диференціально-функціональних рівнянь, зокрема класичні означення та основні постановки початкових і крайових задач. Зроблено огляд літературних джерел за тематикою дисертаційних досліджень і з яких запозичується методика досліджень та результати яких поширюються на нові класи задач. Наведено хронологію

досліджень схем апроксимації диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь, її сучасний стан та можливі напрямки застосування, наведено питання, які залишились нерозв'язаними.

У другому розділі роботи вивчаються схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням та нейтрального типу, а також один клас лінійних диференціально-функціональних рівнянь, що найчастіше зустрічається в прикладних застосуваннях.

Аналіз точності апроксимації елемента запізнення у випадку неперервної вхідної функції здійснено в підрозділі 2.1. Тут для покращення точності апроксимації розглядається послідовність  $m$  елементів запізнення, що послідовно між собою з'єднані.

Точність апроксимації розв'язків початкових задач для диференціально-функціональних рівнянь із запізненням та нейтрального типу розв'язками відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь досліджено в підрозділах 2.2-2.4. Основними результатами цього розділу є Теорема 2.1 та Теорема 2.2. В них одержано коефіцієнтні умови на вихідні системи диференціально-функціональних рівнянь, що забезпечують збіжність схеми апроксимації. В цьому ж розділі розглянуто застосування схем апроксимації для наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями за допомогою коренів характеристичних рівнянь відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

При застосуванні класичної схеми апроксимації одержуються зручні для реалізації на ЕОМ алгоритми знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів, що однак вимагають високої розмірності відповідної апроксимуючої системи. Для підвищення точності апроксимації неасимптотичних коренів квазіполіномів запропоновано схему підвищеної точності апроксимації та проведено порівняння схем на тестових модельних прикладах.

Алгоритми дослідження стійкості лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями та їх реалізація для тестових прикладів розглянуто в підрозділі 2.6.

В інженерній практиці системи із запізненням часто замінюють системами без запізнення на тій підставі, що воно мале. В підрозділі 2.6.2 розглянуто математичне обґрунтування можливості заміни диференціально-різницевих рівнянь із запізненням на звичайні диференціальні рівняння, а також здійснено аналіз праць по знаходженню верхніх меж запізнення, для яких режим стійкості систем із запізненням є аналогічний режиму стійкості відповідних систем без запізнення. Тут зокрема запропонована методика знаходження верхньої межі запізнення, для якої зберігається стійкість системи із запізненням.

Для простіших лінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням методом  $D$  - розбиття знайдено точне значення верхньої межі запізнення при якому ще зберігається стійкість.

У третьому розділі дисертаційної роботи досліджуються крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма сталими запізненнями. Інтегро-диференціальні рівняння із запізненням виникають при математичному моделюванні поширення епідемій в задачах математичної біології та хімічної кінетики тощо. Визначено функціональний простір, якому належать розв'язки розглянутих крайових задач, досліджено властивості гладкості розв'язків в залежності від структури відхилень аргумента.

Відомо, що не існує універсальних методів побудови їх точних розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням. Тому основними теоретичними питаннями при дослідженні таких задач є обґрунтування конструктивних підходів доведення існування їх розв'язків та розробка ефективних методів побудови наближених розв'язків. Методом стислих відображень встановлено достатні умови існування розв'язків таких задач.

Для наближеного знаходження розв'язків крайових задач у підрозділі 3.2 розглядається застосування схем апроксимації диференціальних рівнянь із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь. Для обґрунтування точності апроксимації загальної крайової задачі для інтегро-диференціальних

рівнянь із багатьма сталими запізненнями встановлено оцінку точності апроксимації елемента запізнення у випадку кусково неперервних вхідних функцій.

Наведену методику апроксимації крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма сталими запізненнями продемонстровано на модельному тестовому прикладі.

У четвертому розділі розглядаються застосування схем апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь для знаходження неасимптотичних коренів відповідних квазіполіномів та розв'язання важливих для практичних застосувань таких задач: аналіз стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями; знаходження верхньої межі запізнення лінійних систем із запізненням, для якої зберігається її стійкість.

Дослідження цих задач зводиться до перевірки умов від'ємності дійсних частин усіх нулів відповідних квазіполіномів. Оскільки безпосередня перевірка на практиці такої умови можлива тільки в найпростіших випадках у роботі для її розв'язання аналізуються корені характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

Реалізація запропонованих алгоритмів дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь продемонстровано на модельних тестових прикладах. Описано розроблене прикладне програмне забезпечення для моделювання стійкості лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь та знаходження наближених розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням.

Аналіз числових експериментів, здійснених для тестових модельних прикладів, підтверджує наведені в роботі теоретичні результати.

**Практичне значення отриманих результатів.** Результати дисертації мають в основному теоретичний характер. Вони є вагомим внеском у методику дослідження систем диференціально-різницевих і диференціально-функціональних рівнянь. Побудовані та обгрунтовані схеми апроксимації початкових задач для диференціально-функціональних рівнянь запізнюючого і нейтрального типів та крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із

запізненням можуть бути використані при вивченні прикладних задач механіки, оптимального керування, динамічних процесів екології, імунології, економіки та інших областей, математичними моделями яких є розглянуті в роботі диференціально-функціональні рівняння. Одержані алгоритми знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів та побудови області стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь можуть бути також використані для подальшого дослідження якісних властивостей розв'язків лінійних автономних систем із запізненням.

**Ключові слова:** диференціально-різницеві рівняння, диференціально-функціональні рівняння, динамічні системи, початкова та крайові задачі, існування та єдиність розв'язку, метод усереднення, запізнення та нейтральний тип, схеми апроксимації, оцінка похибки, стійкість та асимптотична стійкість, область стійкості, метод - Д розбиття, малий параметр, функції Ляпунова, комп'ютерне моделювання.